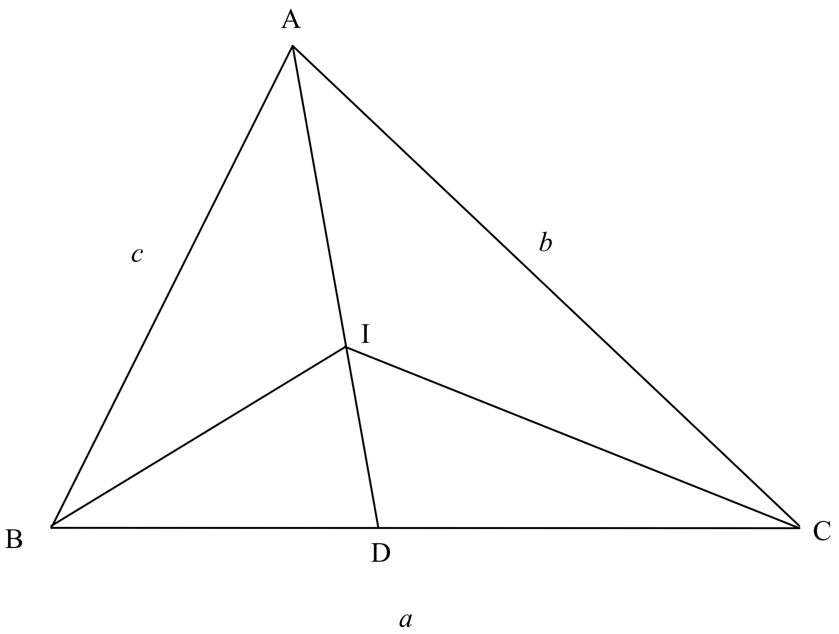
三角形の内心のベクトルの求め方

三角形 ABC の内心を I，辺 BC,CA,AB の長さを a,b,c とする。

求め方 1：内角の 2 等分線の性質を利用



直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，AI は∠BAC の二等分線だから，

BD：DC＝AB：AC＝c：b

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，BD＝$\dfrac{ca}{b+c}$

BI は∠ABC の二等分線だから，AI：ID＝BA：BD

これと BD＝$\dfrac{ca}{b+c}$ より，AI：ID＝c：$\dfrac{ca}{b+c}$＝$b+c$ ：a

よって，AI＝$\dfrac{b+c}{a+b+c}$AD　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

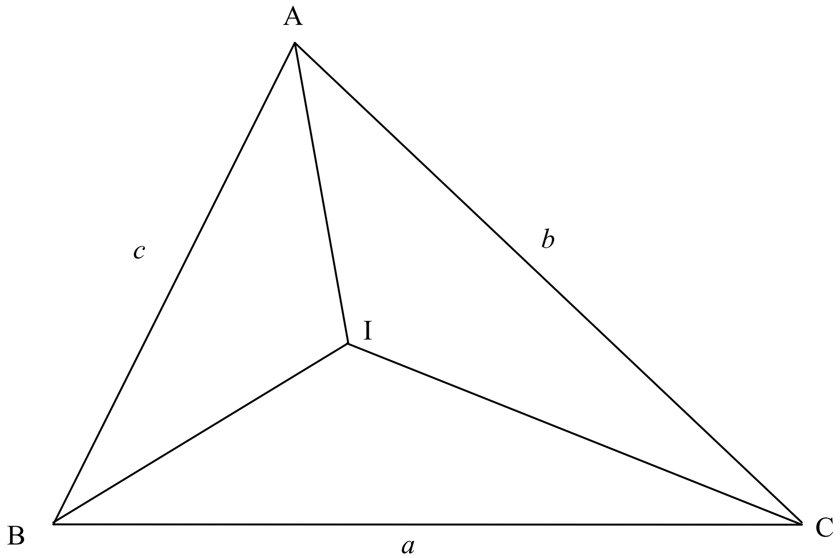
これと $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，A,B,C とは異なる点 O を定点にとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

求め方 **2**：**2** 等分線を単位ベクトルを用いて表すことを利用



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}$

∠BAC の二等分線は線分 B'C'の中点 M を通るから，

∠BAC の二等分線のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は正の実数 k を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=2k\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)$ と表せる。　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{k}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・①

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=l\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right)$（$l$ は正の実数）より，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AI}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right)\\
&=\left(1-\frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\
&=\left(1-\frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{l}{a}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\
&=\left(1-\frac{l}{a}-\frac{l}{c}\right)\mathrm{AB}+\frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots②
\end{aligned}
$$

①，②より，$\begin{cases} \dfrac{k}{c} = 1 - \dfrac{l}{a} - \dfrac{l}{c} \\ \dfrac{k}{b} = \dfrac{l}{a} \end{cases}$ $\quad \therefore k = \dfrac{bc}{a+b+c}$

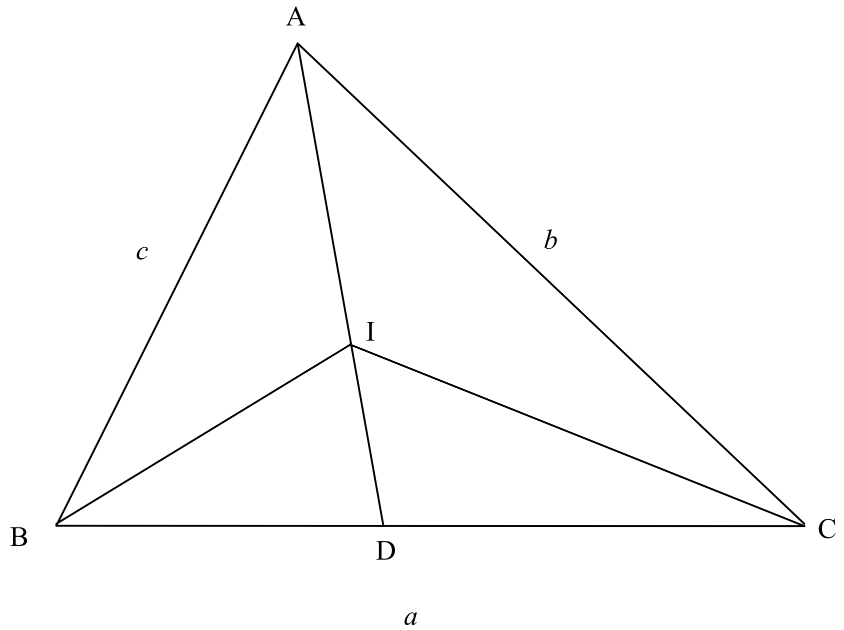
これを①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，A,B,C とは異なる点 O を定点にとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

求め方 **3**：面積比を利用



内接円の半径を r とすると，△IBC：△ICA：△IAB＝$\dfrac{ar}{2}$ ：$\dfrac{br}{2}$ ：$\dfrac{cr}{2}$ ＝$a:b:c$

∴△ABC：△IBC＝$a+b+c$ ：a

ここで，辺 BC を共通底辺とすると，△ABC：△IBC＝AD：ID

よって，AD：ID＝$a+b+c$ ：a 　∴AD：AI＝$a+b+c$ ：$b+c$ 　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

これと $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，A,B,C とは異なる点 O を定点にとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$